



TITLE:

Anti-Webによる $\$H\$$ -彩色に関する 新たな階層構造の導出 (理論計算機 科学の深化と応用)

AUTHOR(S):

庄司, 將一; 小西, 宏; 上嶋, 章宏

CITATION:

庄司, 將一 ...[et al]. Anti-Webによる $\$H\$$ -彩色に関する新たな階層構造の導出 (理論計算機科学の深化と応用). 数理解析研究所講究録 2009, 1649: 195-202

ISSUE DATE:

2009-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140737>

RIGHT:

Anti-Web による H -彩色に関する新たな階層構造の導出

大阪電気通信大学・工学研究科 庄司 将一 (Masakazu Shoji)

Graduate School of Engineering,
Osaka Electro-Communication University

エフ・エックス・プラットフォーム株式会社 小西 宏 (Hiroshi Konishi)
FX Platform Co., Ltd.

大阪電気通信大学・工学研究科 上嶋 章宏 (Akihiro Uejima)

Graduate School of Engineering,
Osaka Electro-Communication University

1 はじめに

グラフ彩色の一般化である H -彩色問題 (H は単純無向グラフ) [2] は, ごく単純な規則に従い集合を分割する問題といえ, スケジューリングや回路の結線, 基地局へのチャネル割り当てなど多くの対象に応用し得る. 近年, H -彩色問題の部分問題である n/k -彩色問題 (n, k は $n/k \geq 2$ である自然数) について, 古典的な点彩色問題で成立する性質を n/k -彩色問題上に拡張する研究が盛んである [1, 4].

n/k -彩色問題と本研究で扱う $\neg W(n, k)$ -彩色問題は, グラフ H をそれぞれ $W(n, k)$ (Web と呼ばれる), $\neg W(n, k)$ (Anti-Web と呼ばれる) に限定した場合の H -彩色問題であるが, 両問題間には密接な関係があり, $n \geq 2k+2$ ならば, グラフ $\neg W(n, k)$ は $W(n, k+1)$ の補グラフである. n/k -彩色に関する性質としては, n/k の増加に伴い n/k -彩色可能なグラフも増加するという明確な階層構造が知られているが [3], $\neg W(n, k)$ -彩色に関する性質については議論されていない. 本研究では, $\neg W(n, k)$ -彩色に関する新たな階層構造について, その一部を明らかにする.

2 準備

本節では, n/k -彩色と $\neg W(n, k)$ -彩色に関する用語を定義する. さらに, n/k -彩色による階層構造の既存結果を示し, 本研究の目的である $\neg W(n, k)$ -彩色による階層構造について述べる. 本稿では, グラフ G に対し, その頂点集合を $V(G)$, 辺集合を $E(G)$ で表現することもある. また, 頂点数 n の完全グラフを K_n で表す.

n/k -彩色に関するグラフ $W(n, k) = (V, E)$ は, 頂点集合 $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$, 辺集合 $E = \{(i, j) | i, j \in V, k \leq |i-j| \leq n-k\}$ で定義される. グラフ G の全ての辺 (v, v') に対し, $W(n, k)$ の辺 $(f(v), f(v'))$ が存在するような関数 $f: V(G) \rightarrow V(W(n, k))$ を G の n/k -彩色と呼ぶ.

一方, $\neg W(n, k)$ -彩色に関するグラフ $\neg W(n, k) = (V, E)$ は, 頂点集合 $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$, 辺集合 $E = \{(i, j) | i, j \in V, 1 \leq |i-j| \leq k \text{ または } n-k \leq |i-j| \leq n-1\}$ で定義される. 但し, $\neg W(n, k)$ 上の頂点 i は便宜上, 頂点 $i+mn$ (m は整数) と表すこともあり, 例えば $\neg W(12, 4)$ において, 頂点 3, -9, 27 は全て同一の頂点を表す (図 1 (左) 参照). グラフ G の全ての辺 (v, v') に対し, $\neg W(n, k)$ の辺 $(f(v), f(v'))$ が存在するような関数 $f: V(G) \rightarrow V(\neg W(n, k))$ を G の $\neg W(n, k)$ -彩色と呼ぶ. グラフ $\neg W(12, 4)$ と G の $\neg W(12, 4)$ -彩色の例を図 1 に示す.

$$f(v_1) = 4, f(v_2) = 6, f(v_3) = 5, f(v_4) = 8, f(v_5) = 7, f(v_6) = 9$$

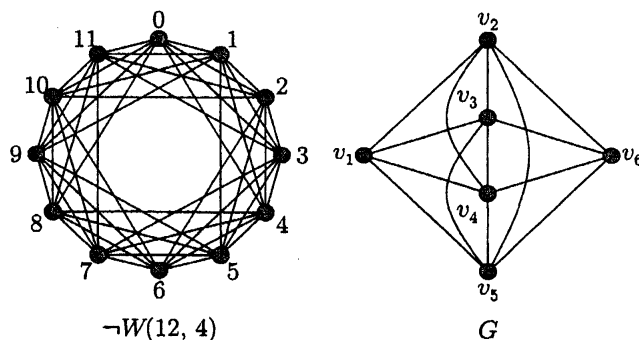


図 1 グラフ $\neg W(12, 4)$ と G の $\neg W(12, 4)$ -彩色の例

G の $\neg W(n, k)$ -彩色が存在するならば, G は $\neg W(n, k)$ -彩色可能であると呼び, $\neg W(n, k)$ -彩色可能なグラフの集合を $\mathcal{L}(\neg W(n, k))$ で表す. 同様に, n -彩色可能 (または n/k -彩色可能) なグラフの集合を $\mathcal{L}(K_n)$ (または $\mathcal{L}(W(n, k))$) で表す. n/k -彩色と $\neg W(n, k)$ -彩色は, ともに従来の n -彩色の一般化であり, 任意の自然数 $n \geq 2$ に対し, $\mathcal{L}(K_n) = \mathcal{L}(W(n, 1)) = \mathcal{L}(\neg W(n, \lfloor n/2 \rfloor))$ である.

n/k -彩色による階層構造に関しては, 以下のような命題が知られている.

命題 1 [3] n, n', k, k' を $2 \leq n/k \leq n'/k'$ である自然数とする. このとき, $n/k = n'/k'$ ならば $\mathcal{L}(W(n, k)) = \mathcal{L}(W(n', k'))$ であり, $n/k < n'/k'$ ならば $\mathcal{L}(W(n, k)) \subsetneq \mathcal{L}(W(n', k'))$ である.

命題 1 により得られる, n/k -彩色による階層構造の一部を表 1 に示す. 但し, 表中の n/k は $\mathcal{L}(W(n, k))$ を表す.

表 1 n/k -彩色による階層構造 (一部)

2/1	⊆						3/1	...	
4/2	⊆		5/2	⊆			6/2	...	
6/3	⊆	7/3	⊆	8/3	⊆		9/3	...	
8/4	⊆	9/4	⊆	10/4	⊆	11/4	⊆	12/4	...
⋮							⋮		
2k/k	...						3k/k	...	

一方, $\neg W(n, k)$ -彩色による階層構造については議論されておらず, 本研究では, $\neg W(n, k)$ -彩色に関する以下の定理を証明することで, 新たな階層構造を示す.

定理 1 $p \geq 2, 0 \leq q \leq k$ である任意の自然数 p, q, k に対し, 以下の命題が成り立つ.

- (a) $q = 0$ ならば, $\mathcal{L}(\neg W(p(k+1) + q, k)) = \mathcal{L}(K_{k+1})$ である.
- (b) $1 \leq q \leq k$ ならば, $\mathcal{L}(K_{k+1}) \subsetneq \mathcal{L}(\neg W(p(k+1) + q, k)) \subsetneq \mathcal{L}(K_{k+[q/p]+1})$ である.

定理 2 $p, p' \geq 2$ かつ $1 \leq q, q' \leq k$ である $\neg W(p(k+1) + q, k)$ -彩色と $\neg W(p'(k+1) + q', k)$ -彩色に関して, 以下の命題が成り立つ.

- (a) $p > p'$ かつ $q = q'$ ならば, $\mathcal{L}(\neg W(p(k+1) + q, k)) \subsetneq \mathcal{L}(\neg W(p'(k+1) + q', k))$ である.
- (b) $p = p'$ かつ $q \neq q'$ ならば, $\mathcal{L}(\neg W(p(k+1) + q, k)) - \mathcal{L}(\neg W(p'(k+1) + q', k)) \neq \emptyset$ である.
- (c) $p(k+1) + q = m(p'(k+1) + q')$ ($m \geq 2$ は自然数) ならば, $\mathcal{L}(\neg W(p(k+1) + q, k)) \subsetneq \mathcal{L}(\neg W(p'(k+1) + q', k))$ である.

定理 1 および 2(a) により得られる, $\neg W(n, k)$ -彩色による階層構造の一部を図 2 に示す. 但し, 図中の $i(k+1) + j$ は $\mathcal{L}(\neg W(i(k+1) + j, k))$ を表す.

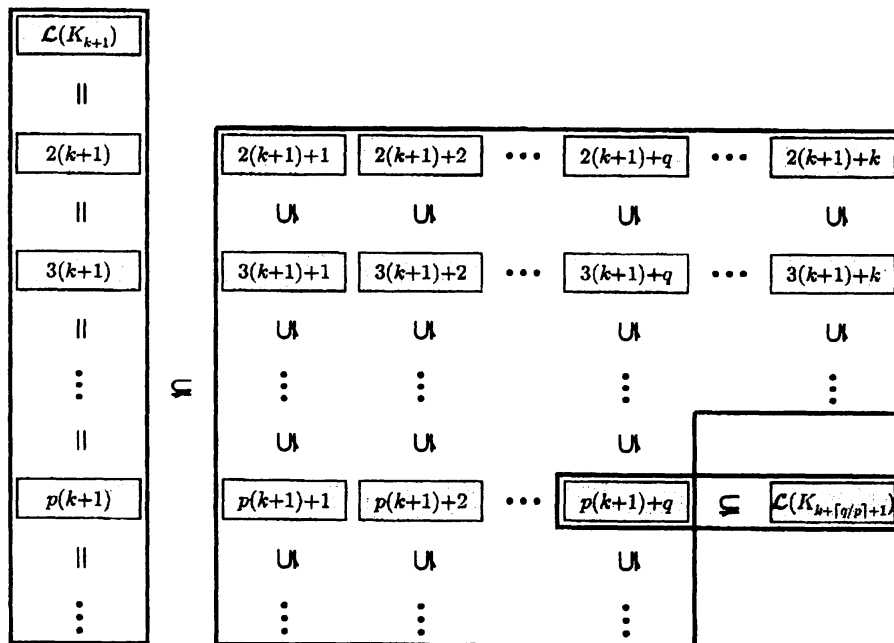


図 2 $\neg W(n, k)$ -彩色による階層構造 (一部)

特に, $k = 2$ である $\neg W(n, k)$ -彩色については, 以下の定理が示せる.

定理 3 $p, p' \geq 2$ である $\neg W(3p+1, 2)$ -彩色と $\neg W(3p'+2, 2)$ -彩色に関して, 以下の命題が成り立つ.

- (a) $p < 2p' + 1$ ならば, $\mathcal{L}(\neg W(3p+1, 2)) - \mathcal{L}(\neg W(3p'+2, 2)) \neq \emptyset$ である.

グラフ $\neg W(p(k+1)+q, k)$ の $(k+\lceil q/p \rceil+1)$ -彩色 f に関しては,

$$f(v_i) = \begin{cases} i \pmod{k+\lceil q/p \rceil} & (0 \leq i < (p-r)(k+\lceil q/p \rceil)) \\ (i - (p-r)(k+\lceil q/p \rceil)) \pmod{k+\lceil q/p \rceil+1} & ((p-r)(k+\lceil q/p \rceil) \leq i < p(k+1)+q) \end{cases}$$

となるような f が存在する $((p-r)(k+\lceil q/p \rceil)+r(k+\lceil q/p \rceil+1) = p(k+1)+q$ であることに注意されたい). 一方, 完全グラフ $K_{k+\lceil q/p \rceil+1}$ が $\neg W(p(k+1)+q, k)$ -彩色不可能であることは, グラフ $\neg W(p(k+1)+q, k)$ がサイズ $k+\lceil q/p \rceil+1$ のクリークを持たないことから自明である. \square

3.2 定理 2 の証明

以降の証明では, グラフ $\neg W(n, k)$ の $\neg W(n', k)$ -彩色において, $\neg W(n, k)$ の頂点 i を v_i で表すこともある. 定理 2 の証明で必要となる用語を以下に定義する. グラフ $\neg W(p(k+1)+q, k)$ に対し, グラフ $G(p, k) = (V, E)$ を

$$\begin{aligned} V &= \{v_0, v_1, \dots, v_{p(k+1)}\} \\ E &= \{(v_{i(k+1)}, v_{i(k+1)+j}) | 0 \leq i < p, 1 \leq j \leq k\} \cup \{(v_{i(k+1)+j}, v_{(i+1)(k+1)}) | 0 \leq i < p, 1 \leq j \leq k\} \\ &\quad \cup \{(v_{i(k+1)+j}, v_{(i+1)(k+1)+j'}) | 0 \leq i < p, 1 \leq j \leq k\} \end{aligned}$$

と定義し, このグラフを基本部品と呼ぶ. 基本部品 $G(p, k)$ を図 5 に示す (図中の楕円部分はクリークを表し, クリーク上の 2 頂点間の辺は省略している).

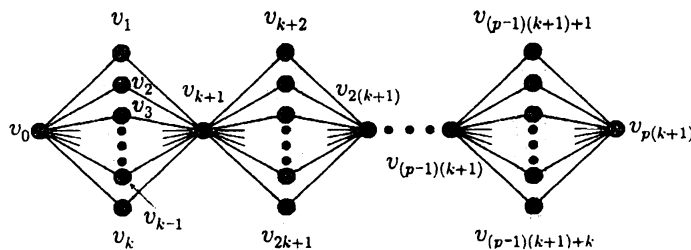


図 5 基本部品 $G(p, k)$

基本部品 $G(p, k)$ の $\neg W(p(k+1)+q, k)$ -彩色 f に関する性質を以下に示す. $\neg W(p(k+1)+q, k)$ の対称性より, 一般性を失うことなく $f(v_0) = 0$ と仮定でき,

$$\begin{aligned} \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)\} &\in \{-k, -(k-1), \dots, -1\}, \\ &\quad \{-(k-1), -(k-2), \dots, -1\} \cup \{1\}, \\ &\quad \{-(k-2), -(k-3), \dots, -1\} \cup \{1, 2\}, \\ &\quad \vdots \\ &\quad \{-1\} \cup \{1, 2, \dots, k-1\}, \\ &\quad \{1, 2, \dots, k\} \end{aligned}$$

となる. このとき, $f(v_{k+1}) \in \{-(k+1), 0, k+1\}$ となり, 同様に,

$$\begin{aligned} f(v_{2(k+1)}) &\in \{-2(k+1), -(k+1), 0, k+1, 2(k+1)\} \\ f(v_{3(k+1)}) &\in \{-3(k+1), -2(k+1), -(k+1), 0, k+1, 2(k+1), 3(k+1)\} \\ &\quad \vdots \\ f(v_{p(k+1)}) &\in \{-p(k+1), -(p-1)(k+1), \dots, p(k+1)\} \end{aligned}$$

となる.

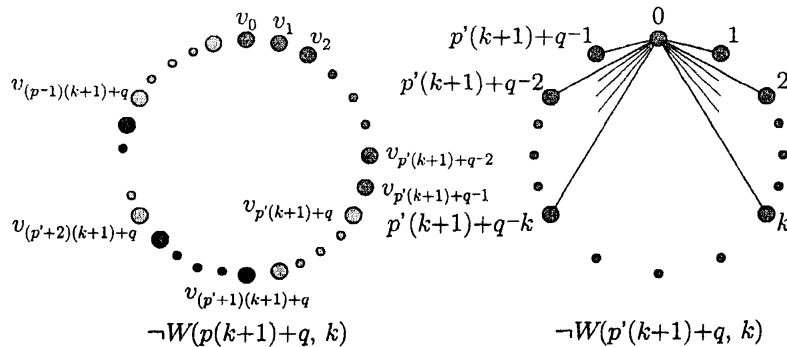
定理 2(a) の証明

$p > p'$ のとき, グラフ $\neg W(p(k+1)+q, k)$ が $\neg W(p'(k+1)+q, k)$ -彩色可能であることと, $\neg W(p'(k+1)+q, k)$ -彩色可能であるが, $\neg W(p(k+1)+q, k)$ -彩色不可能なグラフが存在することを示す.

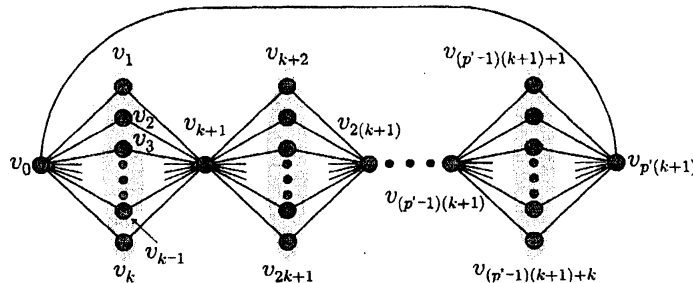
グラフ $\neg W(p(k+1)+q, k)$ の $\neg W(p'(k+1)+q, k)$ -彩色 f に関しては,

$$f(v_i) = \begin{cases} i & (0 \leq i < p'(k+1)+q) \\ (i-q) \pmod{k+1} & (p'(k+1)+q \leq i < p(k+1)+q) \end{cases}$$

となるような f が存在する (図 6 参照).

図6 グラフ $\neg W(p(k+1)+q, k)$ と $\neg W(p'(k+1)+q, k)$

$\neg W(p'(k+1)+q, k)$ -彩色可能であるが, $\neg W(p(k+1)+q, k)$ -彩色不可能なグラフを示す. グラフ $G_a = (V, E)$ は, 基本部品 $G(p', k)$ を用いて構成されており, $V = V(G(p', k)), E = E(G(p', k)) \cup \{(v_0, v_{p'(k+1)})\}$ で定義される. グラフ G_a を図7に示す. G_a の $\neg W(p'(k+1)+q, k)$ -彩色 f に関しては, $f(v_i) = i$ であるような f が存在する.

図7 グラフ G_a

G_a が $\neg W(p(k+1)+q, k)$ -彩色不可能であることを示す. G_a の $\neg W(p(k+1)+q, k)$ -彩色 f が存在するとき, $\neg W(p(k+1)+q, k)$ の対称性より, 一般性を失うことなく $f(v_0) = 0$ と仮定できる. このとき, 辺 $(v_0, v_{p'(k+1)})$ の関係から $f(v_{p'(k+1)}) \in \{-k, -(k-1), \dots, -1, 1, 2, \dots, k\}$, 基本部品 $G(p', k)$ の性質から $f(v_{p'(k+1)}) \in \{-p'(k+1), -(p'-1)(k+1), \dots, p'(k+1)\}$ となるが, $p(k+1)+q-p'(k+1) = (p-p')(k+1)+q > k$ であり, 辺 $(v_0, v_{p'(k+1)})$ の関係を満足するような $f(v_{p'(k+1)})$ は存在しない. 以上より, G_a は $\neg W(p(k+1)+q, k)$ -彩色不可能である. \square

定理 2(b) の証明

$q \neq q'$ のとき, $\neg W(p(k+1)+q, k)$ -彩色可能であるが, $\neg W(p(k+1)+q', k)$ -彩色不可能なグラフを示す. グラフ $G_b = (V, E)$ は, 基本部品 $G(p, k)$ を用いて構成されており,

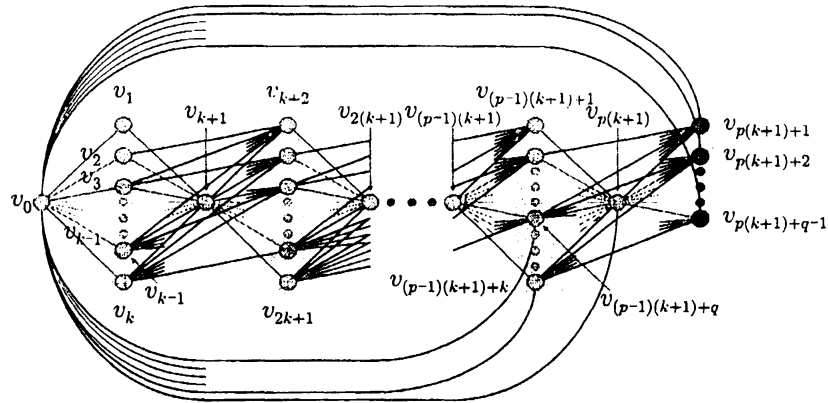
$$\begin{aligned} V &= V(G(p, k)) \cup \{v_{p(k+1)+1}, v_{p(k+1)+2}, \dots, v_{p(k+1)+q-1}\} \\ E &= E(G(p, k)) \cup \{(v_{p(k+1)}, v_{p(k+1)+j}) | 1 \leq j < q\} \cup \{(v_{i(k+1)+j}, v_{(i+1)(k+1)+j'}) | 0 \leq i < p-1, 1 \leq j' < j \leq k\} \\ &\quad \cup \{(v_{(p-1)(k+1)+j}, v_{p(k+1)+j'}) | 1 \leq j' < j \leq k, j' < q\} \cup \{(v_0, v_i) | (p-1)(k+1)+q \leq i < p(k+1)+q\} \end{aligned}$$

で定義される. グラフ G_b を図8に示す. G_b の $\neg W(p(k+1)+q, k)$ -彩色 f に関しては, $f(v_i) = i$ であるような f が存在する.

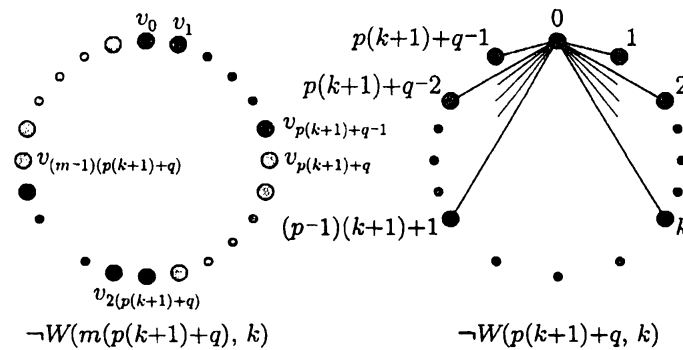
G_b が $\neg W(p(k+1)+q', k)$ -彩色不可能であることを示す. G_b の $\neg W(p(k+1)+q', k)$ -彩色 f が存在するとき, 一般性を失うことなく $f(v_0) = 0$ と仮定でき, 辺 $(v_0, v_{p(k+1)})$ の関係から $f(v_{p(k+1)}) \in \{-k, -(k-1), \dots, -1, 1, 2, \dots, k\}$, 基本部品 $G(p, k)$ の性質から $f(v_{p(k+1)}) \in \{-p(k+1), -(p-1)(k+1), \dots, p(k+1)\}$ となるが, $\neg W(p(k+1)+q', k)$ の対称性より, $f(v_{p(k+1)}) = p(k+1)$ の場合のみを考えることで充分である. $f(v_{p(k+1)}) = p(k+1)$ のとき, 基本部品 $G(p, k)$ の性質から $f(v_{k+1}) = k+1, f(v_{2(k+1)}) = 2(k+1), \dots, f(v_{(p-1)(k+1)}) = (p-1)(k+1)$ となり, 各 i ($0 \leq i < p$) に対し $f(v_{i(k+1)+1}) = i(k+1)+1, f(v_{i(k+1)+2}) = i(k+1)+2, \dots, f(v_{i(k+1)+k}) = i(k+1)+k$ となる. また, $i = p$ の場合も同様に, $f(v_{p(k+1)+1}) = p(k+1)+1, f(v_{p(k+1)+2}) = p(k+1)+2, \dots, f(v_{p(k+1)+q-1}) = p(k+1)+q-1$ となる. $q > q'$ のとき, $f(v_{p(k+1)+q'}) = p(k+1)+q'$ であるが, 頂点 $0, p(k+1)+q'$ は同一の頂点であり, 辺 $(v_0, v_{p(k+1)+q'})$ の関係に反する. 一方, $q < q'$ のとき, $f(v_{(p-1)(k+1)+q}) = (p-1)(k+1)+q$ であるが, $p(k+1)+q' - ((p-1)(k+1)+q) = k+q' - q + 1 > k$ であり, 辺 $(v_0, v_{(p-1)(k+1)+q})$ の関係に反する. 以上より, G_b は $\neg W(p(k+1)+q', k)$ -彩色不可能である. \square

定理 2(c) の証明

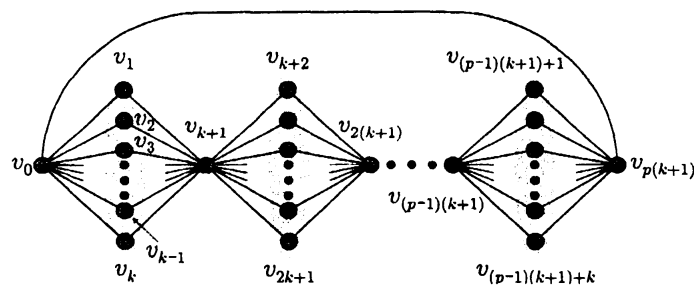
$m \geq 2$ のとき, グラフ $\neg W(m(p(k+1)+q), k)$ が $\neg W(p(k+1)+q, k)$ -彩色可能であることと, $\neg W(p(k+1)+q, k)$ -彩色可能であるが, $\neg W(m(p(k+1)+q), k)$ -彩色不可能なグラフが存在することを示す.

図 8 グラフ G_b

グラフ $\neg W(m(p(k+1)+q), k)$ の $\neg W(p(k+1)+q, k)$ -彩色 f に関しては, $f(v_i) = i \pmod{p(k+1)+q}$ となるような f が存在する (図 9 参照).

図 9 グラフ $\neg W(m(p(k+1)+q), k)$ と $\neg W(p(k+1)+q, k)$

$\neg W(p(k+1)+q, k)$ -彩色可能であるが, $\neg W(m(p(k+1)+q), k)$ -彩色不可能なグラフを示す. グラフ $G_c = (V, E)$ は, 基本部品 $G(p, k)$ を用いて構成されており, $V = V(G(p, k)) \cup \{(v_0, v_{p(k+1)})\}$ で定義される. グラフ G_c を図 10 に示す. G_c の $\neg W(p(k+1)+q, k)$ -彩色 f に関しては, $f(v_i) = i$ であるような f が存在する.

図 10 グラフ G_c

G_c が $\neg W(m(p(k+1)+q), k)$ -彩色不可能であることを示す. G_c の $\neg W(m(p(k+1)+q), k)$ -彩色 f が存在するとき, $\neg W(m(p(k+1)+q), k)$ の対称性より, 一般性を失うことなく $f(v_0) = 0$ と仮定できる. このとき, 辺 $(v_0, v_{p(k+1)})$ の関係から $f(v_{p(k+1)}) \in \{-k, -(k-1), \dots, -1, 1, 2, \dots, k\}$, 基本部品 $G(p, k)$ の性質から $f(v_{p(k+1)}) \in \{-p(k+1), -(p-1)(k+1), \dots, p(k+1)\}$ となるが, $m(p(k+1)+q) - p(k+1) = p(m-1)(k+1) + mq > k$ であり, 辺 $(v_0, v_{p(k+1)})$ の関係を満足するような $f(v_{p(k+1)})$ は存在しない. 以上より, G_c は $\neg W(m(p(k+1)+q), k)$ -彩色不可能である. \square

3.3 定理 3 の証明

定理 3(a) の証明

$p < 2p' + 1$ のとき, グラフ $\neg W(3p+1, 2)$ が $\neg W(3p'+2, 2)$ -彩色不可能であることを示す (図 11 参照). $\neg W(3p+1, 2)$ の $\neg W(3p'+2, 2)$ -彩色 f が存在するとき, $\neg W(3p'+2, 2)$ の対称性より, 一般性を失うことなく $f(v_{3p}) = -1, f(v_0) = 0$ または $f(v_{3p}) = -2, f(v_0) = 0$ と仮定できる. また, 連続する任意の 2 頂点 v_{i-1}, v_i に対し, $|f(v_i) - f(v_{i-1})| = 2$ であると仮定すると, $f(v_{3p}) = -2, f(v_0) = 0$ とできるが, $f(v_1) = -1$ となり, 仮定に矛盾する. 従って, $f(v_{3p}) = -1, f(v_0) = 0$ と仮定できる.

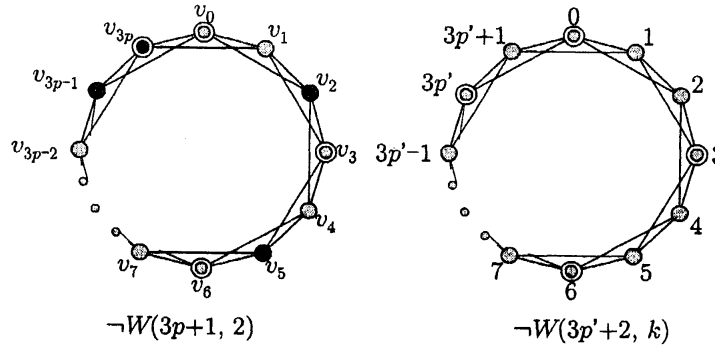


図 11 グラフ $\neg W(3p+1, 2)$ と $\neg W(3p'+2, 2)$

このとき, 頂点 v_1, v_2, v_3 に割り当てられる頂点の組合せは, 表 2 の 5 通りに制限される. さらに, $f(v_2) = -1, f(v_3) = 0$ (または $f(v_2) = 2, f(v_3) = 3$) のときは, 同様の議論により, v_5, v_6 に割り当てられる頂点の組合せも制限される.

一方, $f(v_2) = 2, f(v_3) = 0$ (または $f(v_2) = -1, f(v_3) = -3$) のときは, 頂点 v_4, v_5, v_6 に割り当てられる頂点の組合せが表 3 の 3 通りに制限される. さらに, $f(v_5) = -1, f(v_6) = 0$ (または $f(v_5) = 2, f(v_6) = 3$) のときは表 2 の議論により, v_8, v_9 に割り当てられる頂点の組合せも制限される.

表 2 $f(v_{3p}) = -1, f(v_0) = 0$ に対する割り当ての組合せ

$f(v_{3p})$	$f(v_0)$	$f(v_1)$	$f(v_2)$	$f(v_3)$
-1	0	-2	-1	-3
-1	0	-2	-1	0
-1	0	1	-1	0
-1	0	1	2	0
-1	0	1	2	3

表 3 $f(v_2) = 2, f(v_3) = 0$ に対する割り当ての組合せ

$f(v_2)$	$f(v_3)$	$f(v_4)$	$f(v_5)$	$f(v_6)$
2	0	1	-1	0
2	0	1	2	0
2	0	1	2	3

以下, 同様の議論を繰り返すことができ, 頂点 v_3, v_6, \dots, v_{3p} に割り当てられる頂点の候補は,

$$\begin{aligned}
 f(v_3) &\in \{-3, 0, 3\} \\
 f(v_6) &\in \{-3, 0, 3, 6\} \\
 f(v_9) &\in \{-6, -3, 0, 3, 6, 9\} \\
 f(v_{12}) &\in \{-6, -3, 0, 3, 6, 9, 12\} \\
 &\vdots \\
 f(v_{3(p-1)}) &\in \{-3(\lceil(p-1)/2\rceil), -3(\lceil(p-3)/2\rceil), \dots, -3, 0, 3, \dots, 3(p-2), 3(p-1)\} \\
 f(v_{3p}) &\in \{-3(\lceil p/2\rceil), -3(\lceil(p-2)/2\rceil), \dots, -3, 0, 3, \dots, 3(p-1), 3p\}
 \end{aligned}$$

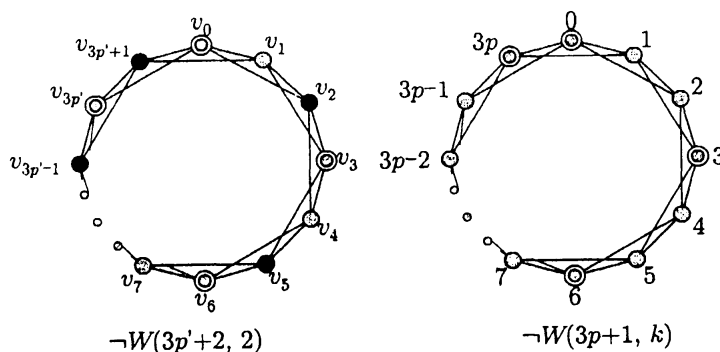
となる. また, 仮定 $f(v_{3p}) = -1$ より, $3i = i'(3p'+2) - 1$ ($-\lceil p/2\rceil \leq i \leq p$) である整数 i, i' が存在しなければならないが, $p < 2p' + 1$ より, $3i \in \{-1, 3p'+1\}$ となる. このような整数 i は存在しないため, $\neg W(3p+1, 2)$ は $\neg W(3p'+2, 2)$ -彩色不可能である. \square

定理 3(b) の証明

$p' < 2p$ のとき, グラフ $\neg W(3p'+2, 2)$ が $\neg W(3p+1, 2)$ -彩色不可能であることを示す (図 12 参照). $\neg W(3p'+2, 2)$ の $\neg W(3p+1, 2)$ -彩色 f が存在するとき, $\neg W(3p+1, 2)$ の対称性より, 一般性を失うことなく $f(v_{3p'+1}) = -1, f(v_0) = 0$ または $f(v_{3p'+1}) = -2, f(v_0) = 0$ と仮定できる. また, 連続する任意の 2 頂点 v_{i-1}, v_i に対し, $|f(v_i) - f(v_{i-1})| = 1$ であると仮定すると, $f(v_{3p'+1}) = -1, f(v_0) = 0$ とできるが, $f(v_1) = 1, f(v_2) = 2, \dots, f(v_{3p'+1}) = 3p' + 1$ となり, 仮定に矛盾する. 従って, $f(v_{3p'+1}) = -2, f(v_0) = 0$ と仮定でき, $f(v_{3p}) = -1$ となる.

このとき, 頂点 v_1, v_2, v_3 に割り当てられる頂点の組合せは, 表 4 の 3 通りに制限される. さらに, $f(v_2) = -2, f(v_3) = 0$ のときは, 同様の議論により, v_5, v_6 に割り当てられる頂点の組合せも制限される.

一方, $f(v_2) = 1, f(v_3) = 0$ (または $f(v_2) = -2, f(v_3) = -3$) のときは, 頂点 v_4, v_5, v_6 に割り当てられる頂点の組合せが表 5 の 5 通りに制限される. さらに, $f(v_5) = -2, f(v_6) = 0$ (または $f(v_5) = 1, f(v_6) = 3$) のときは表 4 の議論により, $f(v_5) = 1, f(v_6) = 0$ (または

図 12 グラフ $\neg W(3p'+2, 2)$ と $\neg W(3p+1, 2)$

$f(v_5) = -2, f(v_6) = -3$ のときは表 5 の議論により, v_8, v_9 に割り当てられる頂点の組合せも制限される.

表 4 $f(v_{3p'+1}) = -2, f(v_0) = 0$ に対する割り当ての組合せ

$f(v_{3p'+1})$	$f(v_0)$	$f(v_1)$	$f(v_2)$	$f(v_3)$
-2	0	-1	1	0
-2	0	-1	-2	0
-2	0	-1	-2	-3

表 5 $f(v_2) = 1, f(v_3) = 0$ に対する割り当ての組合せ

$f(v_2)$	$f(v_3)$	$f(v_4)$	$f(v_5)$	$f(v_6)$
1	0	2	1	3
1	0	2	1	0
1	0	-1	1	0
1	0	-1	-2	0
1	0	-1	-2	-3

以下, 同様の議論を繰り返すことができ, 頂点 $v_3, v_6, \dots, v_{3p'}$ に割り当てられる頂点の候補は,

$$\begin{aligned}
 f(v_3) &\in \{-3, 0\} \\
 f(v_6) &\in \{-6, 0, 3\} \\
 f(v_9) &\in \{-9, -3, 0, 3\} \\
 f(v_{12}) &\in \{-12, -3, 0, 3, 6\} \\
 &\vdots \\
 f(v_{3(p'-1)}) &\in \{-3(p'-1), -3(p'-2), \dots, -3, 0, 3, \dots, 3(\lfloor (p'-3)/2 \rfloor), 3(\lfloor (p'-1)/2 \rfloor)\} \\
 f(v_{3p'}) &\in \{-3p', -3(p'-1), \dots, -3, 0, 3, \dots, 3(\lfloor (p'-2)/2 \rfloor), 3(\lfloor p'/2 \rfloor)\}
 \end{aligned}$$

となる. また, 仮定 $f(v_{3p'}) = -1$ より, $3i = i'(3p+1) - 1$ ($-p' \leq i \leq \lfloor p'/2 \rfloor$) である整数 i, i' が存在しなければならないが, $p' < 2p$ より, $3i \in \{-3p-2, -1\}$ となる. このような整数 i は存在しないため, $\neg W(3p'+2, 2)$ は $\neg W(3p+1, 2)$ -彩色不可能である. \square

4 まとめ

本研究では, これまでに議論されていなかった $\neg W(n, k)$ -彩色による階層構造を部分的に解明した. しかし, $k \geq 3$ に対する $\neg W(n, k)$ -彩色と $\neg W(n', k)$ -彩色についての議論は不十分であり, $k \neq k'$ である $\neg W(n, k)$ -彩色と $\neg W(n', k')$ -彩色の関係性についても議論されていない. また, $\neg W(n, k)$ -彩色と n'/k' -彩色の関係性については, グラフ $\neg W(n, k)$ と $W(n', k')$ が同型である場合, あるいは定理 1(a) で示した $\neg W(p(k+1), k)$ -彩色と等価である場合しかわかっていない. 今後の課題としては, これらの未解決課題を解析することが挙げられる.

参考文献

- [1] H. Hatami and R. Tusserkani, "On the Complexity of the Circular Chromatic Number," *Journal of Graph Theory*, Vol. 47, No. 3, pp. 226–230, 2004.
- [2] P. Hell and J. Nešetřil, *Graphs and Homomorphisms*, Vol. 28 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford University Press, Oxford, 2004.
- [3] A. Uejima and H. Ito, "Subdivision of the Hierarchy of H -colorable Graph Classes by Circulant Graphs," *CTW04 Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization*, pp. 232–236, June 2004.
- [4] X. Zhu, "Circular Chromatic Number: a Survey," *Discrete Mathematics*, No. 229, pp. 371–410, 2001.